Für die schriftliche Fachhochschulreifeprüfung sind nur die Inhalte der Seiten 1 bis 6 der Merkhilfe relevant, die nicht mit einem grauen Balken markiert sind.

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$\mathbb{Z}=\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}_+=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x\geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^*=\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$

2 Geometrie

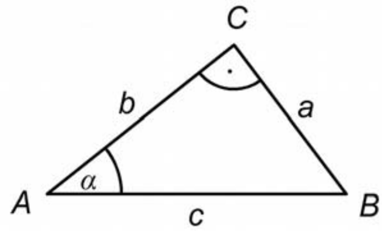
Ebene Figuren — A: Flächeninhalt — u: Umfang

Dreieck $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

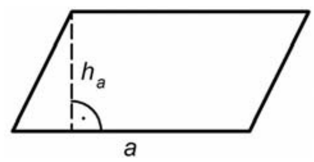
Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras $c^2=a^2+b^2$

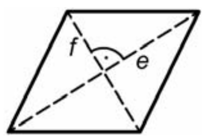
$\sin(\alpha)=\frac{a}{c}$ $\cos(\alpha)=\frac{b}{c}$ $\tan(\alpha)=\frac{a}{b}$



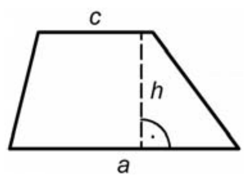
Parallelogramm
$A=a\cdot h_a$



Raute
$A=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f$



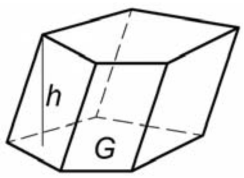
Trapez
$A=\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$



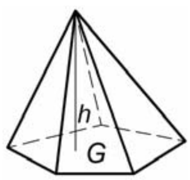
Kreis $A=\pi\cdot r^2$ $u=2\cdot\pi\cdot r$

Körper — V: Volumen — M: Mantelfläche — O: Oberfläche — G: Grundfläche

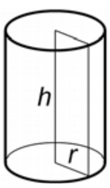
Prisma
$V=G\cdot h$



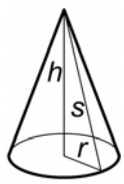
Pyramide
$V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$



Gerader Kreiszylinder
$V=\pi\cdot r^2\cdot h$
$M=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$



Gerader Kreiskegel
$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$
$M=\pi\cdot r\cdot s$



Kugel $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ $O=4\cdot\pi\cdot r^2$

3 Terme

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $\quad$ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

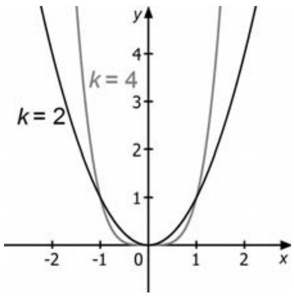
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\quad$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ $\quad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad$ $a^0 = 1$

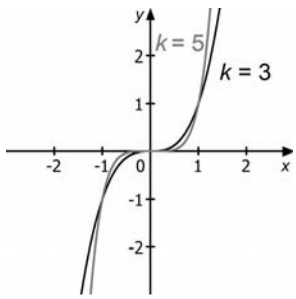
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

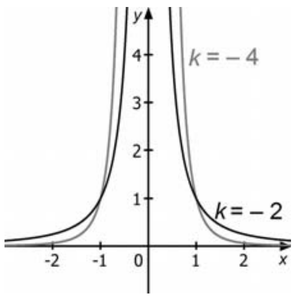
k gerade und positiv



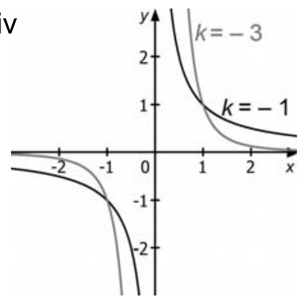
k ungerade und positiv



k gerade und negativ

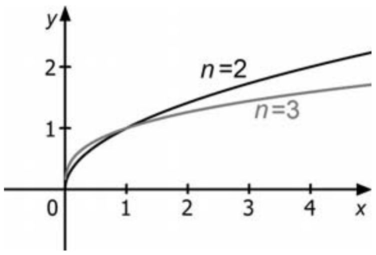


k ungerade und negativ



waagrechte Asymptote $y = 0$, senkrechte Asymptote $x = 0$

Wurzelfunktion mit $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

$x^n = a$	$a \geq 0$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
		falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = a$	$a < 0$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

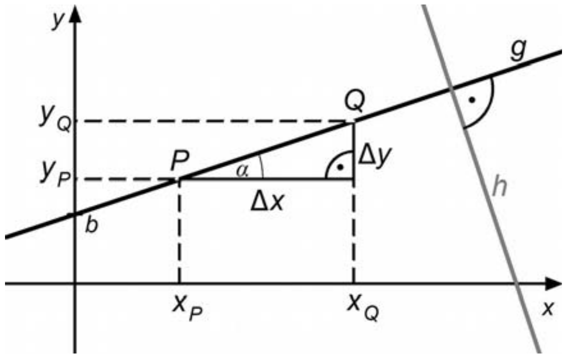
Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$f(x) = mx + b$

Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

Steigung	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$
Punkt-Steigungs-Form	$y = m(x - x_P) + y_P$
Steigungswinkel	$m = \tan(\alpha)$
Orthogonalität	$m_g \cdot m_h = -1 \quad \Leftrightarrow \quad g \perp h$



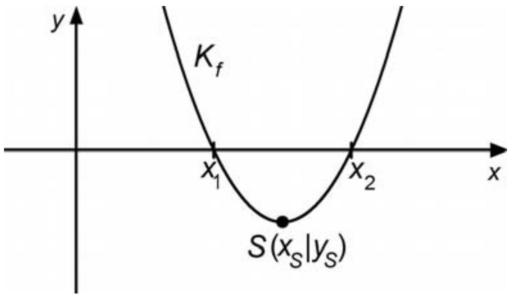
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Linearfaktorzerlegung $\quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S.

Scheitelform $\quad y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad$ falls $\; b^2 - 4ac \geq 0$

$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad$ falls $\; \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

Polynomfunktion dritten Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Polynomfunktion n-ten Grades

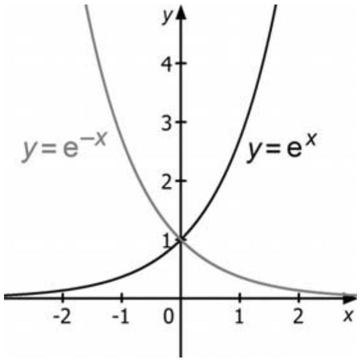
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}; \, a_n \neq 0$

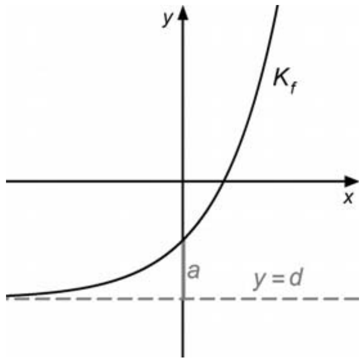
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot q^x + d$ mit $a \neq 0;\ q > 0 \wedge q \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$ mit $a \neq 0;\ b \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = d$





Exponentialgleichung mit $q, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = q^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_q(y)$

$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)$

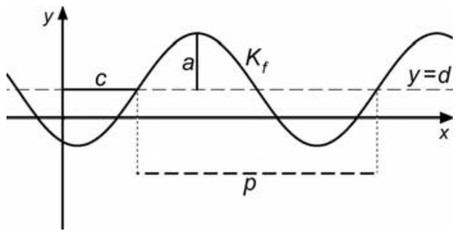
$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$ $\qquad \log_q(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(q)}$ $\qquad e^{\ln(y)} = y$ $\qquad \ln(e^x) = x$

Trigonometrische Funktion

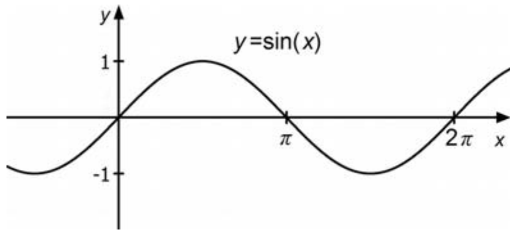
$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ mit $a, b \neq 0$

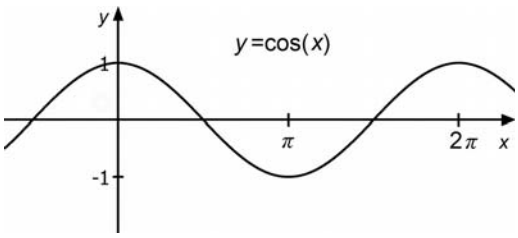
Amplitude $|a|$

Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$



Bogenmaß x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0





Abbildungen

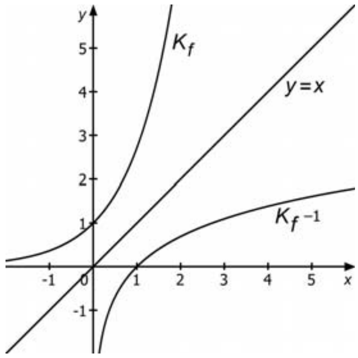
Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der x-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der y-Achse	$g(x) = f(-x)$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ ($b > 0$) in x-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a ($a > 0$) in y-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$
Verschiebung	um c in x-Richtung	$g(x) = f(x - c)$
	um d in y-Richtung	$g(x) = f(x) + d$

Umkehrfunktion

Ist eine Funktion *f* auf einem Intervall streng monoton (wachsend oder fallend), so ist *f* auf diesem Intervall umkehrbar.

Das Schaubild der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von *f* an der ersten Winkelhalbierenden.



5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\qquad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitungsregeln

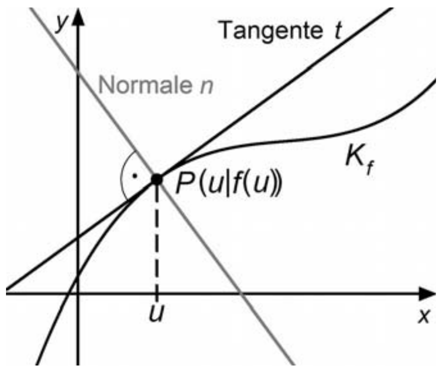
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung	$m_t = f'(u)$
Tangentengleichung	$y = f'(u)(x - u) + f(u)$
Normalensteigung	$m_n = \frac{-1}{f'(u)}$
Normalengleichung	$y = \frac{-1}{f'(u)}(x - u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x) = f(x)$ für alle x $f(-x) = -f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x) > 0$ im Intervall J $f'(x) < 0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x) > 0$ im Intervall J $f''(x) < 0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H(x_0 \vert f(x_0))$	$f'(x_0) = 0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) < 0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T(x_0 \vert f(x_0))$	$f'(x_0) = 0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) > 0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W(x_0 \vert f(x_0))$	$f''(x_0) = 0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0$

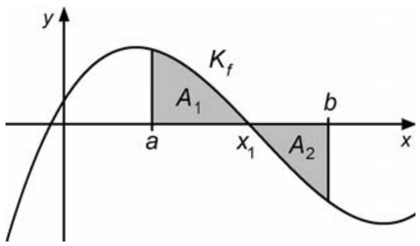
Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

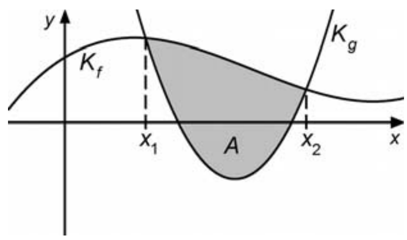
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^{b} f(x)dx$$



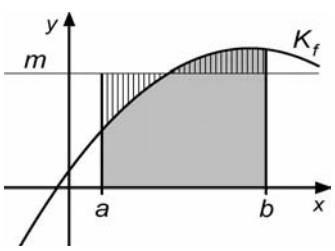
$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx$$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



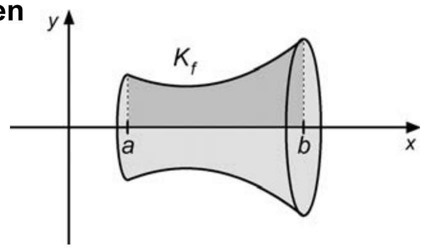
Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$



Rotationsvolumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

6 Stochastik

Relative Häufigkeit	$h_i = \dfrac{\text{absolute Häufigkeit der } i\text{-ten Merkmalsausprägung}}{\text{Stichprobenumfang } n}$
Arithmetisches Mittel	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$
Ereignis	Teilmenge der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments
Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A	$0 \le P(\mathrm{A}) \le 1$ $\qquad P(\mathrm{S}) = 1$
Gegenereignis $\bar{\mathrm{A}}$	$P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
Laplace-Experiment	Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) gleich wahrscheinlich sind
Laplace-Wahrscheinlichkeit	$P(\mathrm{A}) = \dfrac{\lvert\mathrm{A}\rvert}{\lvert\mathrm{S}\rvert} = \dfrac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Zusammengesetzte Ereignisse

Additionssatz	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \quad \Rightarrow \quad P(\mathrm{A}) \cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
A und B stochastisch unabhängig	$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$

Urnenmodelle

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Objekten wird k-mal gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen

- mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge $\quad n^k$
- ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge $\quad \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (d. h. mit einem Griff) $\quad \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Zufallsgröße *X* mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Erwartungswert	$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$
Varianz	$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$
Standardabweichung	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Binomialverteilung

Zahl der Versuche n, Trefferzahl k, Trefferwahrscheinlichkeit p

Wahrscheinlichkeit $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X\le k)=P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=k)$

Erwartungswert $E(X)=\mu=n\cdot p$

Standardabweichung $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Sigma-Regeln

$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 68{,}3\,\%$

$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 95{,}4\,\%$

$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 99{,}7\,\%$

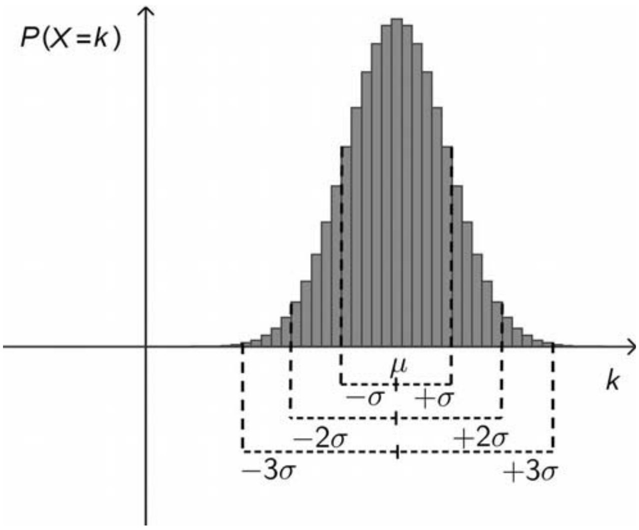
$P(\mu-1{,}64\sigma\le X\le\mu+1{,}64\sigma)\approx 90{,}0\,\%$

$P(\mu-1{,}96\sigma\le X\le\mu+1{,}96\sigma)\approx 95{,}0\,\%$

$P(\mu-2{,}58\sigma\le X\le\mu+2{,}58\sigma)\approx 99{,}0\,\%$

Diese Näherungen sind besser, wenn der Stichprobenumfang n größer ist.

Nach einer Faustregel gelten sie für σ > 3 als brauchbar.



Vertrauensintervall

Näherungsweise bestimmtes Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p

$$\left[h-c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}};h+c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]\quad\text{mit}\quad h=\frac{X}{n}$$

Vertrauenswahrscheinlichkeit	90 %	95 %	99 %	99,9 %
c	1,64	1,96	2,58	3,29

Das Vertrauensintervall hat höchstens die Länge l, wenn für den Stichprobenumfang n gilt $n\ge\frac{c^2}{l^2}$.

Statistische Tests

Mögliche Fehler beim Testen einer Hypothese H_0

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung
H_0 wird nicht verworfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die größtmögliche Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen.

Einseitiger Signifikanztest

	Nullhypothese H_0	Gegenhypothese H_1	Kriterium	Ablehnungsbereich
linksseitig	$H_0: p \geq p_0$	$H_1: p < p_0$	$P(X \leq g) \leq \alpha$	$\{0; 1; \ldots; g\}$
rechtsseitig	$H_0: p \leq p_0$	$H_1: p > p_0$	$P(X \geq g) \leq \alpha$	$\{g; \ldots; n\}$

7 Vektorgeometrie

Betrag eines Vektors $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Einheitsvektor $\quad \vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$

Länge der Strecke *AB* $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Mittelpunkt *M* einer Strecke *AB* $\quad \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Skalarprodukt
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\quad \cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Orthogonalität $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

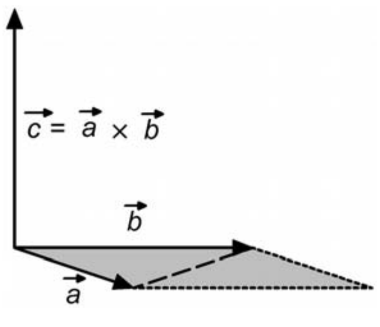
Vektorprodukt
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen voneinander

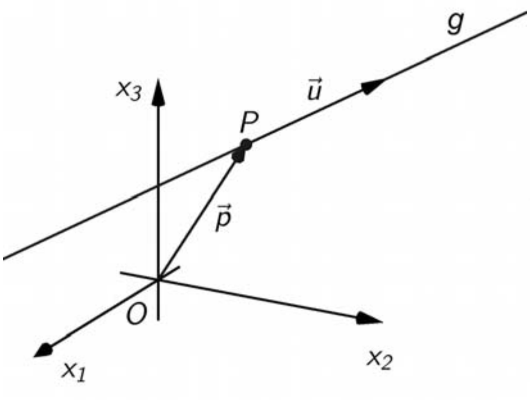
Flächeninhalt eines Parallelogramms $\quad A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

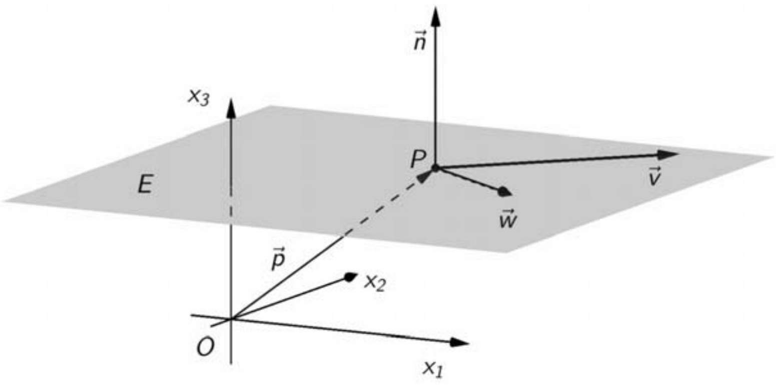
Flächeninhalt eines Dreiecks $\quad A = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$



Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Spannvektoren $\vec{v}\,,\vec{w}$ und Normalenvektor $\vec{n}$





Parameterform	$g: \vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}$ mit $r\in\mathbb{R}$	$E: \vec{x}=\vec{p}+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}$	mit $s,\ t\in\mathbb{R}$
Normalenform		$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$	
Koordinatenform		$E: n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3=b$	mit $b\in\mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden $\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$

zwischen Gerade und Ebene $\sin(\alpha)=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

zwischen zwei Ebenen $\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

Abstand

zwischen Punkt A und Ebene $E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$ $d=\left|\dfrac{(\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

zwischen Punkt A und Ebene $E: n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3=b$ $d=\left|\dfrac{n_1 a_1+n_2 a_2+n_3 a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$

zwischen zwei windschiefen Geraden

$g: \vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}$ und $h: \vec{x}=\vec{q}+s\cdot\vec{v}$ mit $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ $d=\left|\dfrac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

8 Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

Einheitsmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{A}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

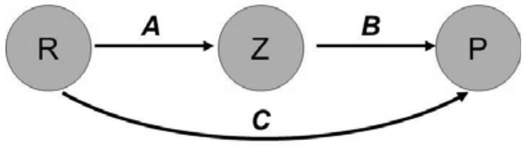
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}$



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe $\vec{r}$, Zwischenprodukte $\vec{z}$, Endprodukte $\vec{p}$

$\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\vec{z}$ $\qquad$ $\vec{z} = \boldsymbol{B}\cdot\vec{p}$ $\qquad$ $\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\vec{p} = \boldsymbol{C}\cdot\vec{p}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten $\vec{k}_R$, Fertigungskosten der Zwischenprodukte $\vec{k}_Z$,
Fertigungskosten der Endprodukte $\vec{k}_P$

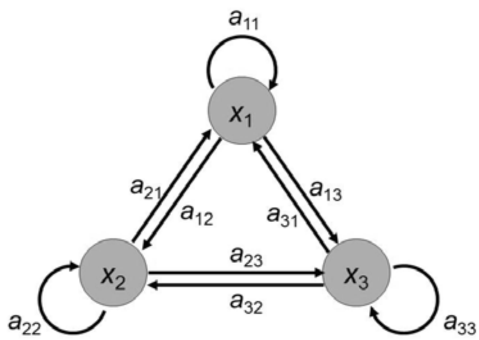
variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\vec{k}_v = \vec{k}_R\cdot\boldsymbol{C} + \vec{k}_Z\cdot\boldsymbol{B} + \vec{k}_P$

Gesamtkosten $K = \vec{k}_v\cdot\vec{p} + K_{fix}$

Übergangsprozesse

Übergangsmatrix zum nebenstehenden Übergangsgraph

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix $\qquad$ alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Aus Verteilung $\vec{x}$ wird Verteilung $\vec{y}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$

Stabilitätsvektor $\vec{x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \vec{x}$

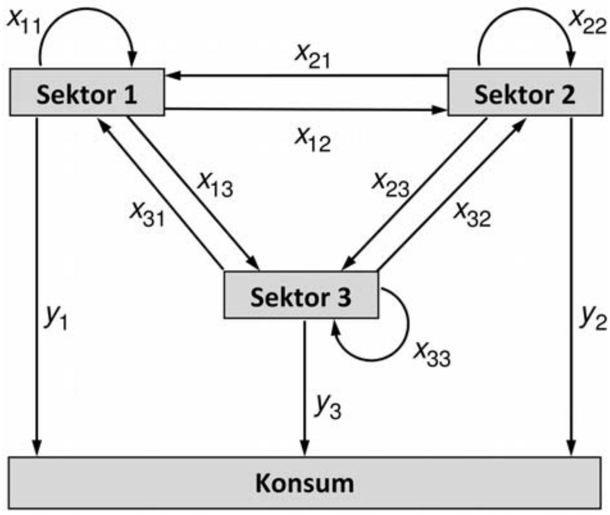
Zyklischer Prozess $\qquad$ $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ für ein $k > 1$

Leontief-Modell

Input-Output-Matrix

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

wobei x_{ij} die Lieferung des Sektors *i* an den Sektor *j* darstellt.



Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Technologiematrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$

Es gilt: $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Interner Verbrauch $\vec{v} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.